Kompleksni brojevi

Matematika 1 za kemičare – dodatni materijali

Sonja Žunar

16. listopada 2020.

1 Definicija kompleksnih brojeva

Sjetimo se: **skup kompleksnih brojeva** je skup

$$\mathbb{C} := \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}\},$$

pri čemu je $i = \sqrt{-1}$ **imaginarna jedinica**. Za z kao gore, x zovemo **realnim dijelom** od z i označavamo ga sa $\mathrm{Re}(z)$, a y zovemo **imaginarnim dijelom** od z i označavamo ga sa $\mathrm{Im}(z)$. Definiramo i **apsolutnu vrijednost** od z formulom

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Primjer 1.

$$\mathrm{Re}(2-3i) = 2, \qquad \mathrm{Im}(2-3i) = -3, \qquad |2-3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

2 Operacije s kompleksnim brojevima

2.1 Zbrajanje

Definiramo

$$(a + bi) + (c + di) := a + c + (b + d)i, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2.

$$(2 + 3i) + (1 - i) = 2 + 1 + (3 - 1)i = 3 + 2i.$$

2.2 Množenje

Definiramo

$$(a + bi)(c + di) := ac - bd + (ad + bc)i, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

(Neprecizno rečeno, množimo "svaki sa svakim", i pritom koristimo činjenicu $i^2 = -1$.)

Primjer 3.

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(1 - i) &= 2 \cdot 1 + 3i \cdot 1 + 2(-i) + 3i(-i) \\ &= 2 + 3i - 2i + 3 \\ &= 5 + i.\end{aligned}$$

2.3 Konjugiranje

Definiramo

$$\overline{a+bi} := a - bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Primjer 4.

$$\overline{1-i} = 1 + i.$$

Primjer 5. Primijetimo:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}(x+yi)\,\overline{x+yi} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2 + x(-yi) + yi \cdot x + yi(-yi) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |x+iy|^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

2.4 Dijeljenje

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ako je $c + di \neq 0$, kvocijent $\frac{a+bi}{c+di}$ računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.\end{aligned}$$

Drugačije zapisano, za $z \in \mathbb{C}$ i $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\overline{w}}{|w|^2}$$

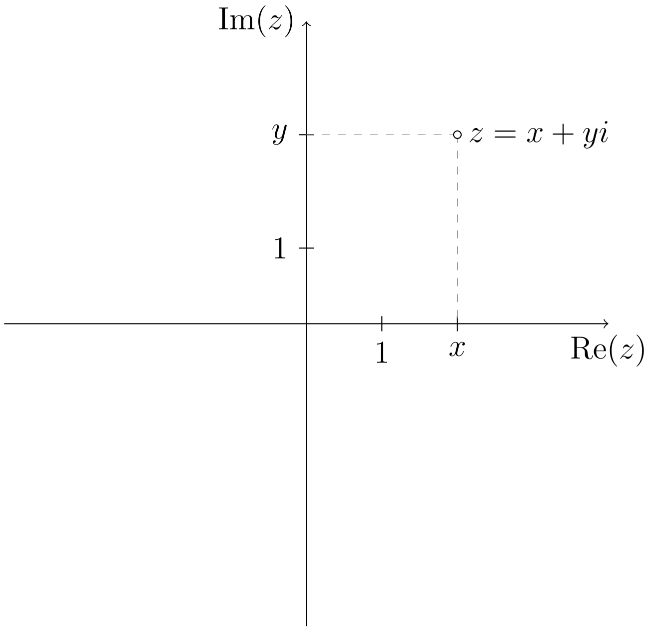
(usporedite ovu formulu s drugim retkom gornjeg raspisa).

Primjer 6.

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{1+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i.$$

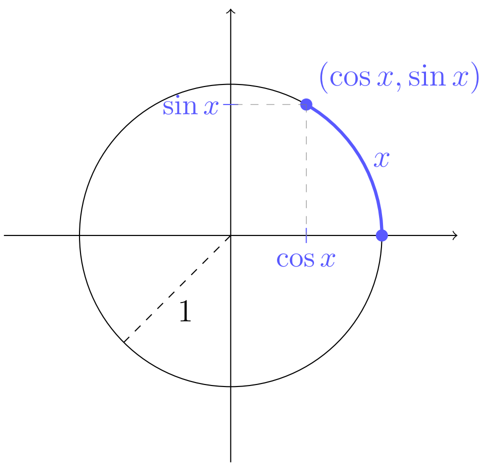
3 Prikaz u kompleksnoj ravnini

Za $x, y \in \mathbb{R}$, broj $z = x + yi \in \mathbb{C}$ identificiramo s točkom (x, y) kompleksne ravnine:



4 Intermezzo: podsjetnik na funkcije $\cos$ i $\sin$

Sjetimo se da se za realan broj $x \geq 0$ vrijednosti $\cos x$ i $\sin x$ mogu definirati "namotavanjem užeta" duljine x na brojevnu kružnicu u pozitivnom smjeru (smjeru suprotnom od kazaljke na satu) krećući iz točke $(1, 0)$, kao na sljedećoj slici.

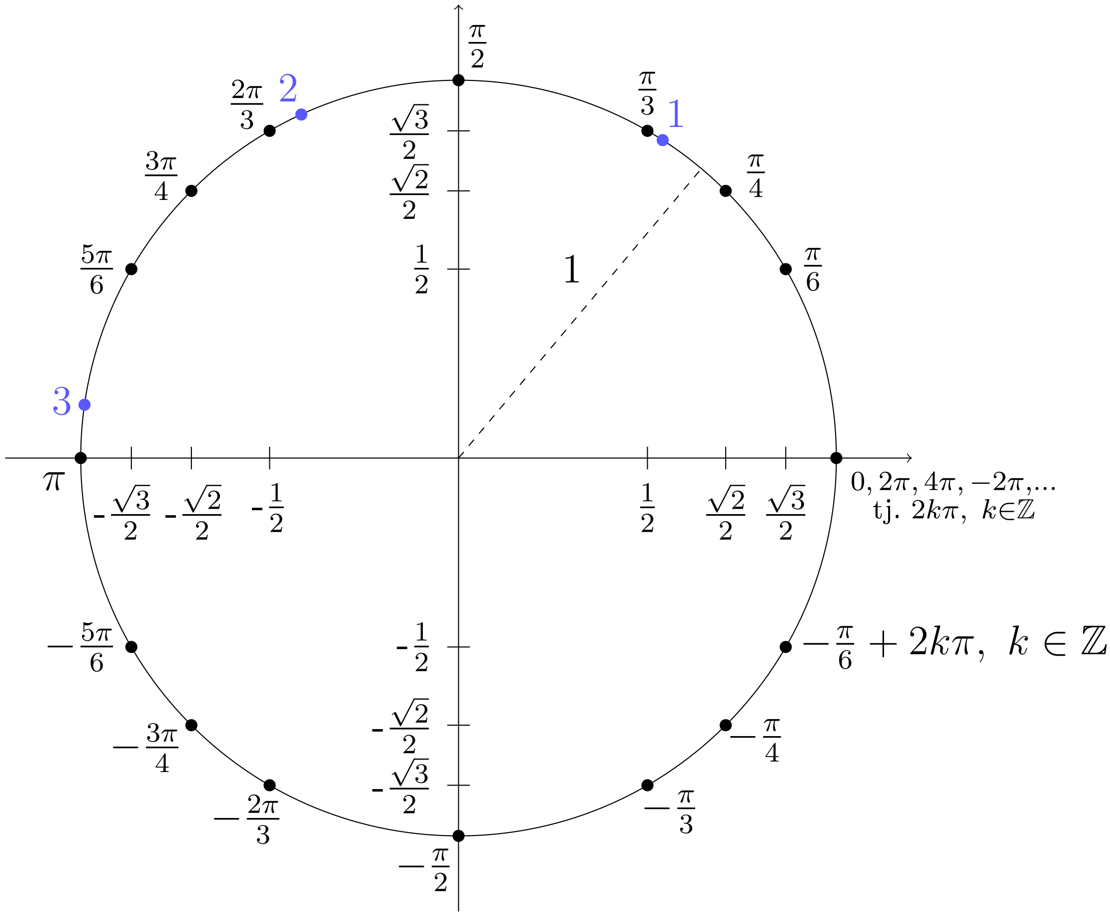


Za realan broj $x < 0$ definicija je analogna, samo što se uže duljine $|x|$ namotava na brojevnu kružnicu u negativnom smjeru (smjeru kazaljke na satu).

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$, $\cos x$ je x-koordinata, a $\sin x$ y-koordinata pripadne točke na brojevnoj kružnici. Vrijedi

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Brojevna kružnica s označenim brojevima čije se vrijednosti sinusa i kosinusa u praksi najčešće koriste prikazana je na Slici 1.



Slika 1: Brojevna kružnica

Zadatak 1. Pogledom na brojevnu kružnicu na Slici 1 uvjerite se da vrijedi sljedeće:

(a) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

(b) $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\cos x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$.

5 Trigonometrijski i eksponencijalni prikaz broja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

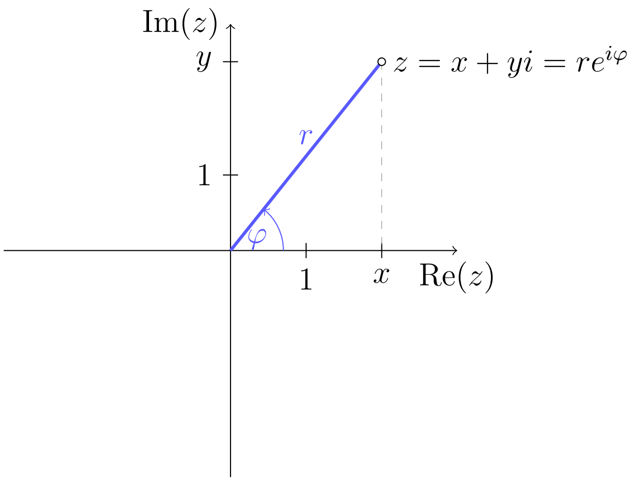
Ponekad je korisno umjesto zadavanja broja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pomoću njegova realnog i imaginarnog dijela, tj. u **euklidskom obliku**

$$z = x + yi \qquad \text{za neke } x, y \in \mathbb{R},$$

zadati z pomoću sljedećih dvaju podataka (vidi Sliku 2):

(1) $r :=$ udaljenost točke z u kompleksnoj ravnini od ishodišta

(2) $\varphi :=$ kut koji u kompleksnoj ravnini polupravac iz ishodišta kroz točku z zatvara s pozitivnim dijelom x-osi, gledano u pozitivnom smjeru krećući od pozitivnog dijela x-osi (dakle, kut φ se određuje na isti način kao kutovi na brojevnoj kružnici).



Slika 2: Euklidske i polarne koordinate kompleksnog broja $z \neq 0$

Uređen par (r, φ) zovemo **polarnim koordinatama** od z. Kut φ zove se **argument** od z i jedinstven je samo do na pribrajanje $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. S druge strane, $r > 0$ je jedinstven. Štoviše, primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut sa Slike 2 vidimo da je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,.$$

Promatrajući pravokutni trokut sa Slike 2, lako se izvedu i ostale formule koje opisuju vezu koordinata

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \leftrightarrow & (r, \varphi): \\ x = r\cos\varphi & & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r\sin\varphi & & \varphi \in \mathbb{R} \text{ je određen sa } \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r}. \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

Iz gornjih formula dobivamo da je

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi,$$

tj.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Zapis broja z dan formulom (2) zove se **trigonometrijski oblik** od z. Definira se

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Koristeći ovu oznaku, (2) možemo ekvivalentno zapisati u obliku

$$z = re^{i\varphi}.$$

Ovaj se zapis broja z zove **eksponencijalni oblik** od z.

Zadatak 2. Zapišite u euklidskom obliku brojeve:

(a) $2e^{i\pi}$

(b) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Rješenje. (a) Imamo

$$2e^{i\pi} \stackrel{(3)}{=} 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2.$$

(b) Imamo

$$4e^{-i\frac{\pi}{6}} \stackrel{(3)}{=} 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{3} - 2i.$$

Zadatak 3. Zapišite u eksponencijalnom obliku broj z, gdje je:

(a) $z = i$

(b) $z = 1 - i$.

Rješenje. (a) Primijetimo da je $z = x + iy$ za $x = 0$ i $y = 1$, pa polarne koordinate (r, φ) od z možemo izračunati pomoću formula (1):

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
- Za φ možemo uzeti bilo koji realan broj koji zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1, \end{cases}$$

  dakle (uvjerite se npr. pogledom na brojevnu kružnicu na Slici 1) bilo koji od brojeva

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Uzmimo npr. $k = 0$; dobivamo $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Dakle,

$$z = re^{i\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(b) Primijetimo da je $z = x + iy$ za $x = 1$ i $y = -1$, pa polarne koordinate (r, φ) od z možemo izračunati pomoću formula iz (1):

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
- Za φ možemo uzeti bilo koji realan broj koji zadovoljava sustav

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

  dakle (uvjerite se npr. pogledom na brojevnu kružnicu na Slici 1) bilo koji od brojeva

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  Uzmimo npr. $k = 0$; dobivamo $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Dakle,

$$z = re^{i\varphi} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

6 Cjelobrojne potencije kompleksnih brojeva

Napomena 1. Zašto volimo eksponencijalni prikaz kompleksnih brojeva? Jedan je razlog što u eksponencijalnom prikazu formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva izgledaju vrlo jednostavno: vrijedi

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{i} \qquad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{4}$$

za sve $r_1, r_2 \in \langle 0, +\infty\rangle$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Pomoću formula (4) lako se pokaže da vrijedi

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad r \in \langle 0, +\infty\rangle\,, \ \varphi \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Drugim riječima, za sve $n \in \mathbb{Z}$ i $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vrijedi **de Moivreova formula**:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Zadatak 4. Izračunajte:

(a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{99}$

(b) $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{60}$

Rješenje. (a) Kao u Zadatku 3 vidimo da je

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

pa je (koristeći de Moivreovu formulu)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{99} &= \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{99} \\
&= e^{i\frac{99\pi}{4}} \\
&\overset{(3)}{=} \cos\left(\frac{99\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{99\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(24\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(24\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(12\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}$$

pri čemu predzadnja jednakost vrijedi jer su sin i cos 2π-periodične funkcije.

(b) Kao u Zadatku 3 vidimo da je

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

pa je (koristeći de Moivreovu formulu)

$$\begin{aligned}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{60} &= \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{60} \\ &= 2^{60}\, e^{50\pi i} \\ &\overset{(3)}{=} 2^{60}\left(\cos\left(50\pi\right)+i\sin\left(50\pi\right)\right) \\ &= 2^{60}\left(\cos\left(25\cdot 2\pi\right)+i\sin\left(25\cdot 2\pi\right)\right) \\ &= 2^{60}\left(\cos 0+i\sin 0\right) \\ &= 2^{60}\left(1+i\cdot 0\right) \\ &= 2^{60},\end{aligned}$$

pri čemu peta jednakost vrijedi jer su sin i cos 2π-periodične funkcije.

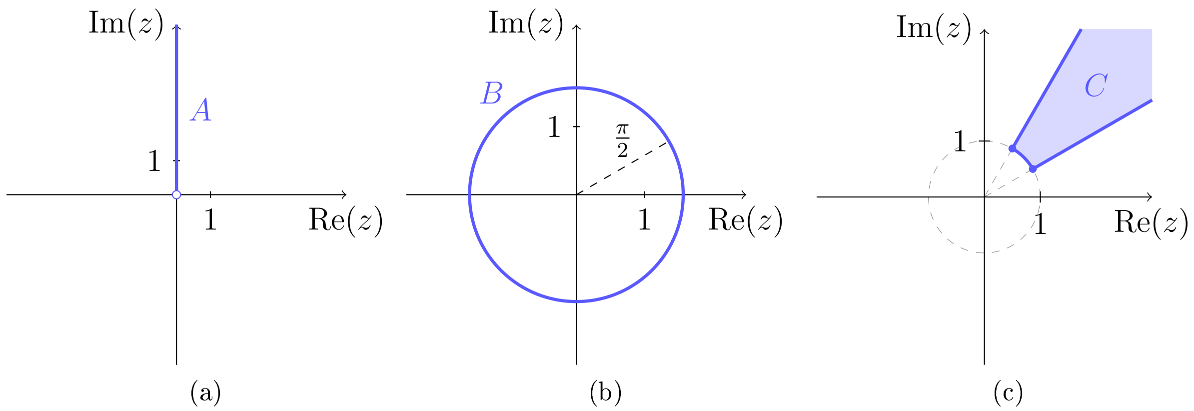
Zadatak 5. Skicirajte sljedeće dijelove kompleksne ravnine:

(a) $A := \left\{re^{i\varphi} : \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$

(b) $B := \left\{re^{i\varphi} : r = \frac{\pi}{2}\right\}$

(c) $C := \left\{re^{i\varphi} : r \geq 1,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]\right\}$.

Rješenje. Sjetimo li se grafičkog značenja polarnih koordinata r i φ (vidi Sliku 2), odmah je jasno da su zadani skupovi skicirani na Slici 3.



Slika 3: Rješenje Zadatka 5

7 n-ti korijen iz kompleksnog broja

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka su $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ brojevi s eksponencijalnim prikazima

$$z = |z|\, e^{i\varphi} \qquad \text{i} \qquad w = |w|\, e^{i\theta}. \tag{5}$$

Kažemo da je z **n-ti korijen** iz w ako je

$$z^n = w.$$

Primijetimo:

$$
\begin{aligned}
z^n = w \quad &\Leftrightarrow \quad \left(|z|\, e^{i\varphi}\right)^n = |w|\, e^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^n\, e^{in\varphi} = |w|\, e^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad |z|\, e^{i\varphi} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \text{ za neki } k \in \mathbb{Z} \\
&\overset{(5)}{\Leftrightarrow} \quad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} \text{ za neki } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu zadnja ekvivalencija vrijedi zbog 2π-periodičnosti funkcije $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ (sjetite se da je $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$). Dakle,

$$
z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}\cdot 2\pi\right)} \text{ za neki } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,. \tag{6}
$$

Posebno, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, postoji točno n n-tih korijena iz w.

Zadatak 6. Odredite sva rješenja u $\mathbb{C}$ sljedećih jednadžbi:

(a) $z^5 = \pi$

(b) $(z - i)^3 = i$.

Rješenje. (a) Eksponencijalni oblik od π dan je formulom

$$
\pi = \pi \cdot e^0,
$$

pa uvrštavanjem $w = \pi$ u formulu (6) dobivamo (uvrštavajući $|w| = \pi$ i $\theta = 0$) da je rješenje zadane jednadžbe

$$
z = \sqrt[5]{\pi} \cdot e^{\frac{2k\pi}{5} i}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\,.
$$

(b) Imamo

$$
\begin{aligned}
(z - i)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad &\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \quad z - i = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \text{ za neki } k \in \{0, 1, 2\} \\
&\Leftrightarrow \quad z = i + e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \text{ za neki } k \in \{0, 1, 2\}\,.
\end{aligned}
$$

Dakle, rješenje zadane jednadžbe je

$$
z = i + e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, 2\}\,.
$$